

АНАЛИЗ МЕТОДОВ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ И НОВАЯ УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ

Д. А. Петрянин

Исследователь при изучении технических процессов часто сталкивается с явлениями, поведение которых может быть описано с помощью экспериментальных (статистических) данных. При этом ставится задача выявить и исследовать закономерности, которым подчиняются реальные процессы, с помощью математических моделей. Найденные закономерности имеют не только теоретическую ценность, они широко применяются на практике – в планировании, управлении и прогнозировании.

Как правило, при нахождении математических моделей используют различные методы аппроксимации и по требуемым параметрам выбирают самый оптимальный (например, по наименьшей погрешности или высокой точности модели в конкретно взятом промежутке). Однако не всегда удается найти оптимальную модель экспериментальных данных с требуемой точностью. В данном случае используют способы повышения точности аппроксимации.

На сегодняшний день есть следующие известные и наиболее используемые методы повышения точности аппроксимации:

- 1) повышение степени полинома (для полиномов);
- 2) увеличение количества членов аппроксимации [1];
- 3) разбиение экспериментальных данных на несколько частей.

Однако повышение точности аппроксимации приводит, как правило, к усложнению аппроксимирующих выражений, что затрудняет как определение значений входящих в эти выражения коэффициентов, так и применение этих выражений для анализа процессов [1–2].

Определение коэффициентов аппроксимации тесно связано с требуемой точностью. Точность определяется критериями приближения, обычно применяют критерии равномерного, среднеквадратичного и интерполяционного (точечного) приближений [3]. Если число заданных точек превышает число определяемых коэффициентов аппроксимации, то можно использовать метод наименьших квадратов, при котором среднеквадратичная ошибка минимальна. Метод наименьших квадратов применяется, когда необходима высокая точность аппроксимации, требует громоздких вычислений, но имеет конструктивный подход для аналитического определения коэффициентов модели (аппроксимации) [1–2]. Метод наименьших квадратов обеспечивает наименьшую сумму квадратов отклонений значений аппроксимирующей функции от значений исходной функции (наименьшую невязку) в произвольном числе точек, не связанном с числом неизвестных коэффициентов [2].

Была разработана модель повышения точности аппроксимации и методика снижения погрешности аппроксимации, описанные в [4], в которых отсутствуют вышеуказанные недостатки. Проведем анализ методов повышения точности аппроксимации.

Повышение степени полинома по методу наименьших квадратов

Одним из способов приближения данных некоторой непрерывной функцией является приближение полиномом по методу наименьших квадратов. Для набора данных (1)

$$(x_i, y_i)_{i=1, 2, \dots, N} \quad (1)$$

требуется найти такой полином степени n (2)

$$p^{(n)}(x) = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} + \dots + p_n x + p_{n+1}, \quad (2)$$

коэффициенты которого являются решением следующей задачи минимизации (3):

$$\min_{p_1, p_2, \dots, p_{n+1}} \sum_{i=1}^N (p^{(n)}(x_i) - y_i)^2. \quad (3)$$

Другими словами, разыскивается полином, который наименее уклоняется от заданных данных в том смысле, что сумма квадратов расстояний от заданных точек (x_i, y_i) до $(x_i, p^{(n)}(x_i))$ будет минимальной [5] (рис. 1).

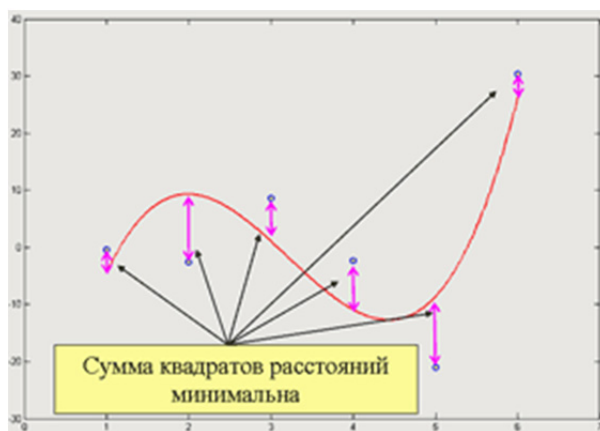


Рис. 1. Графическое представление суммы квадратов расстояний

Степень полинома должна быть меньше количества заданных точек для того, чтобы такой полином был единственным. Например, если заданы три точки, то их можно приблизить либо полиномом нулевой или первой степени (прямая), либо параболой. Причем парабола будет точно проходить через три заданные точки (сумма квадратов расстояний окажется равной нулю), поскольку три коэффициента квадратичного полинома однозначно определяются из трех условий прохождения через заданные точки. В данном случае мы получим уже не приближение данных, а их интерполяцию. На практике обычно применяются полиномы не очень высоких степеней [5].

С помощью пакета прикладных программ для математического моделирования MATLAB [6] был произведен расчет полиномов с разными степенями. Подобный расчет был описан в [5].

В качестве экспериментальных данных были взяты значения потребляемого тока электронным устройством. Результаты расчетов погрешностей для каждой степени найденного полинома сведены в табл. 1, а на рис. 2 представлены графики полиномов $(p^{(1)} - p^{(8)})$ и экспериментальных данных.

Таблица 1

Результаты расчетов полиномов

Степень полинома	Погрешность, %
1	240,26
2	152,65
3	144,34
4	137,27
5	133,05
6	97,93
7	44,92
8	$2,45 \cdot 10^{-8}$

По результатам видно, что повышение степени полинома приводит к уменьшению ошибки, однако качество приближения не всегда улучшается. Например, для наших данных полином восьмой степени обеспечивает практически нулевую ошибку (вычислительные погрешности возникают в ходе алгоритма нахождения коэффициентов) – $2,45 \cdot 10^{-8}$, но само приближение – неудовлетворительное (рис. 2). Так происходит потому, что полином восьмой степени является интерполяционным полиномом, который как правило, плохо подходит для приближения данных [5].

Дальнейшее увеличение степени полинома ни к чему хорошему не приведет, например, при построении полинома девятой и/или последующих степеней.

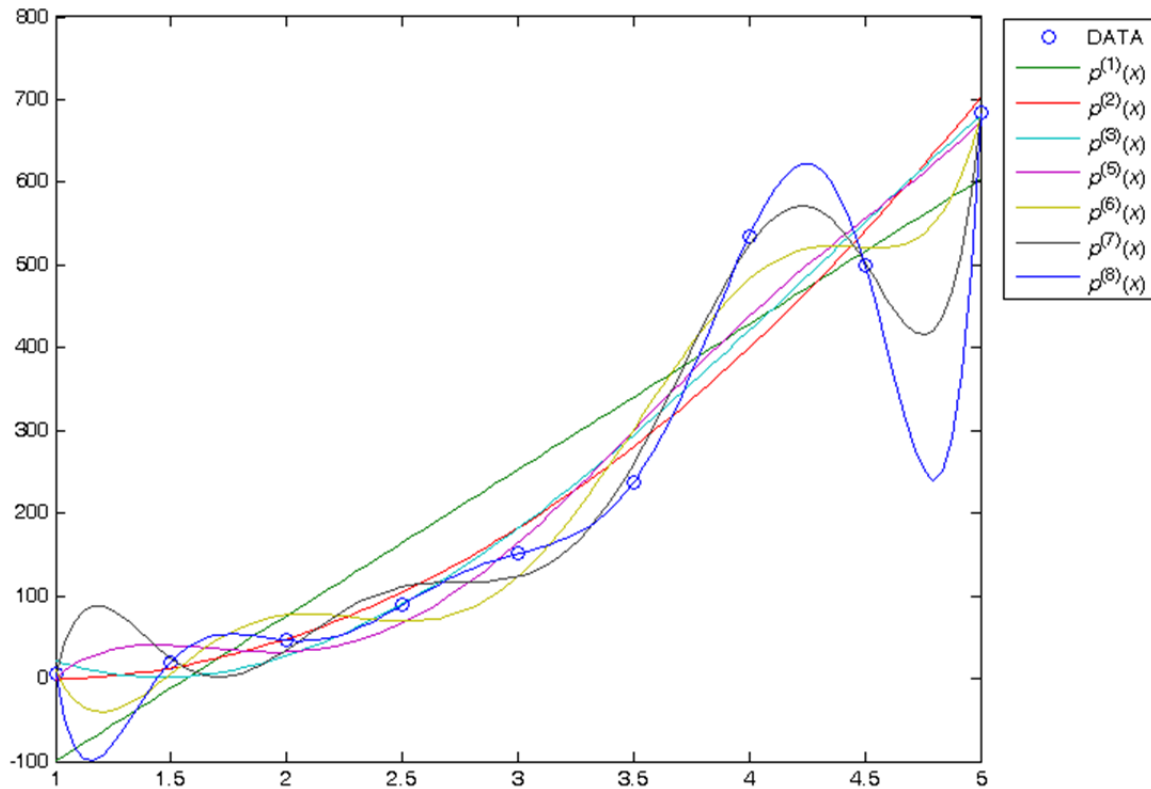


Рис. 2. Графики полиномов 1–8 степени и экспериментальных данных

Увеличение количества членов аппроксимации

Увеличение количества членов аппроксимации тоже имеет свои недостатки. Например, при использовании ряда Грама – Шарлье с другими видами распределений мы сталкиваемся с серьезными проблемами: ряд может вести себя нерегулярно (увеличение количества членов ряда иногда снижает точность аппроксимации); ошибки аппроксимации возрастают с удалением от центра распределения; сумма конечного числа членов ряда при большой асимметрии распределения приводит к отрицательным значениям функций, особенно на краях распределений [7]. Этот способ был подробно описан в [8].

Данный метод хорошо работает для гармонических функций: периодически меняющихся данных. Это было доказано на практике в [9–10].

Разбиение экспериментальных данных на несколько частей в любом случае будет давать высокую точность модели и низкую погрешность, однако оценить в целом все экспериментальные данные будет крайне сложно.

Разработанная модель повышения точности аппроксимации [4] позволяет повышать точность модели по методу наименьших квадратов. Для полиномов данная модель неприменима, так как при расчете полинома точно учитывается набор данных (1): при использовании модели [4] к полиному (2), полином будет проходить между точками экспериментальных данных, при этом погрешность возрастет почти в 2 раза (например, для полинома 1 степени погрешность составляет 353 %, а для 7–92 %).

Мы можем уточнить ранее разработанную модель [4], учитывая проведенный анализ.

Поскольку введение в модель экспериментальных данных дополнительных коэффициентов (для снижения погрешности) усложняет расчеты и саму модель, то коэффициенты лучше всего ввести в модель повышения точности аппроксимации.

Произведем расчет модели аппроксимации методом наименьших квадратов с помощью программы «Выбор метода аппроксимации» [11] на примере. В табл. 2 представлены экспериментальные данные (x, y) и расчетные значения степенного вида аппроксимации (F_A) как оптимального (по наименьшему значению погрешности (рис. 3)) для данного случая.

Таблица 2

Результаты расчетов аппроксимации

x	y	F_A	$F_{A\text{сред}} = 248,9019$
1	6,5	6,176493	
1,5	20,38	20,59839	
2	46,4	48,41415	
2,5	88,63	93,93992	
3	151,1	161,4595	
3,5	237,9	255,2311	
4	535	379,4921	
4,5	500,3	538,4617	
5	684,5	736,3437	

Полученная при расчетах модель выглядит следующим образом (4):

$$F_A(x) = 6,176492x^{2,970569} . \quad (4)$$

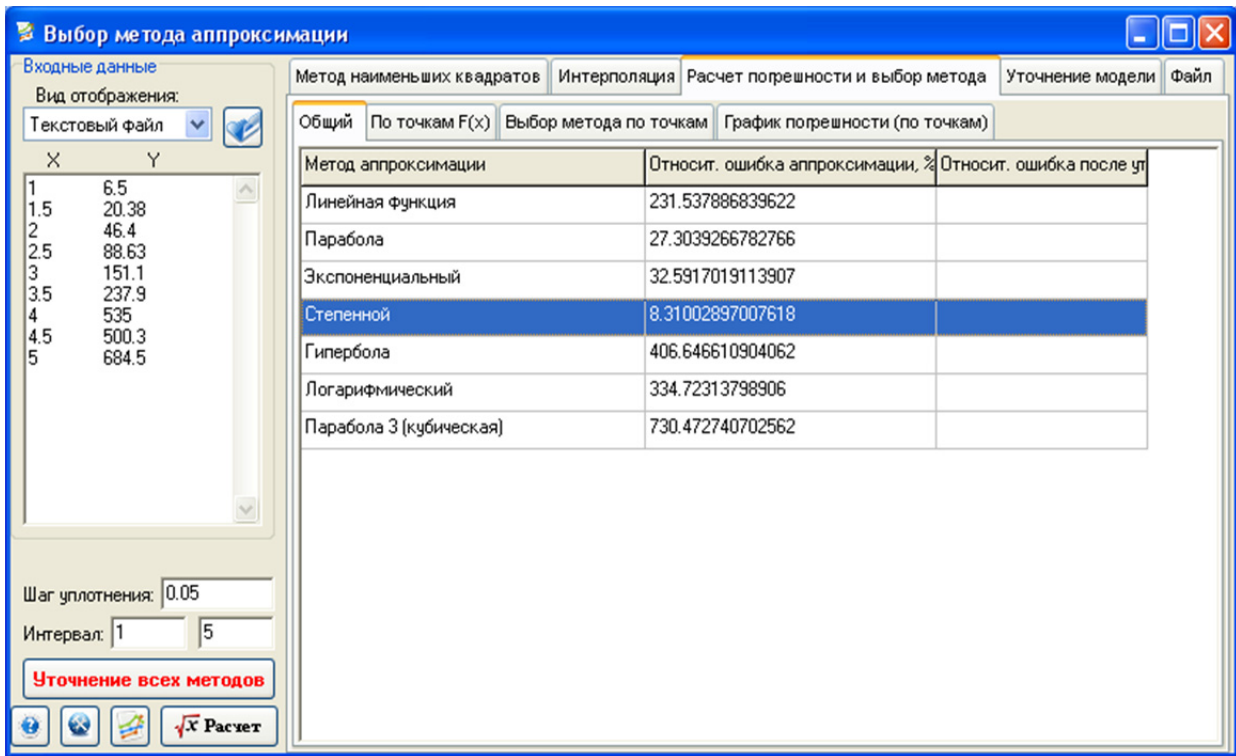


Рис. 3. Результаты расчетов относительной ошибки аппроксимации

Затем производим уточнение найденной модели по [4] и вычисляем заново аппроксимацию. Уточненная модель экспериментальных данных выглядит следующим образом:

$$F_{Ay}(x) = 6,3609x^{2,9297} . \quad (5)$$

В табл. 3 занесены расчетные значения F_{Ay} новой модели (5) (степенного вида аппроксимации). Погрешность данной модели составляет 7,034 % (по результатам расчетов программы «Выбор метода аппроксимации» [11] рис. 4), что говорит о снижении – по сравнению с погрешностью первой найденной модели (4).

Таблица 3

Результаты расчетов аппроксимации после уточнения модели

x	y	$F_{A_i}(x)$	$F_{B_i}(x)$	$F_{A_{\text{B}}}(x)$	$F_{\text{Асрел}} = 242,0788$
1	6.5	6.176493	7.323507179	6.360994126	
1.5	20.38	20.59839	19.66161457	20.86577105	
2	46.4	48.41415	43.88584894	48.47055728	
2.5	88.63	93.93992	82.82007619	93.19732947	
3	151.1	161.4595	140.240516	158.9964604	
3.5	237.9	255.2311	220.0688838	249.7624371	
4	535	379.4921	691.0079337	369.3439857	
4.5	500.3	538.4617	461.6383228	521.5511405	
5	684.5	736.3437	632.1562862	710.1604573	

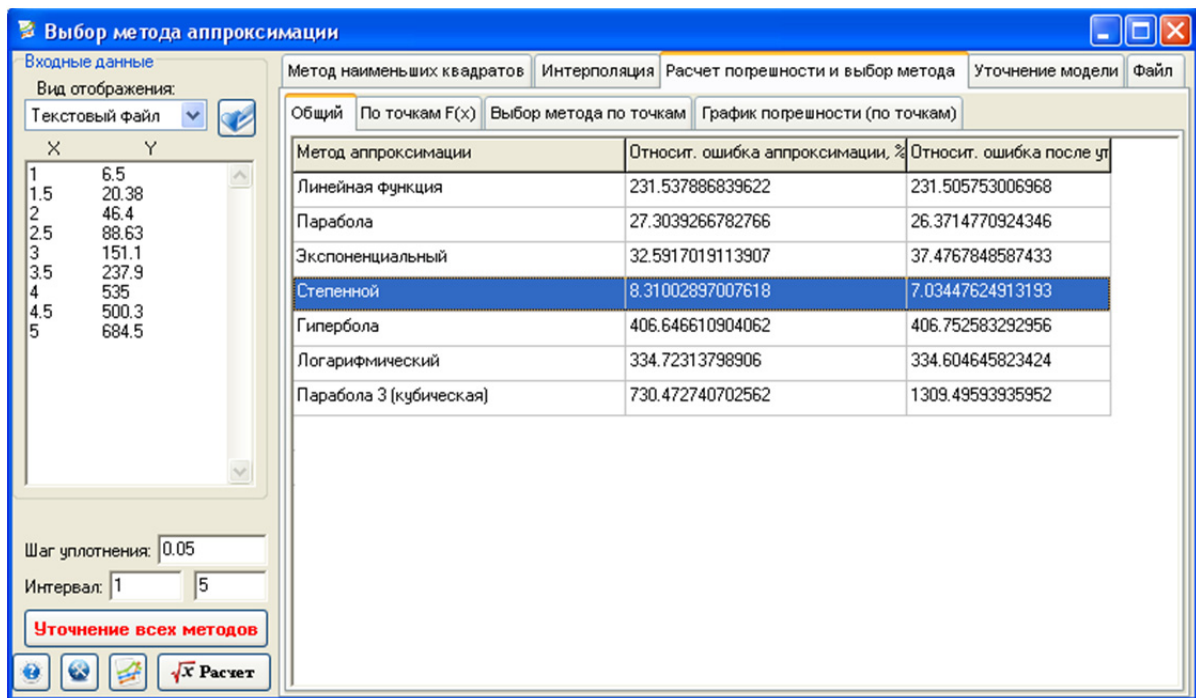


Рис. 4. Результаты расчетов относительной ошибки аппроксимации после уточнения модели

Введем в модель повышения точности аппроксимации дополнительный коэффициент, т.е. дробь $y_n/F_{A_n}(x)$, которая учитывает, во сколько раз рассчитанное значение найденной модели $F_{A_n}(x)$ отличается от исходной величины y_n . Поскольку рассчитанное значение может оказаться отрицательным, то дробь $y_n/F_{A_n}(x)$ будет взята под модуль. Тогда уточненная модель повышения точности аппроксимации будет выглядеть следующим образом.

Если $y_n > F_{A_i}(x)$, то уточнение аппроксимации происходит по модели (6):

$$\begin{cases} F_{Bp1}(x) = y_1 + |y_1 - F_{A1}(x)| + \left| \frac{y_1}{F_{A1}(x)} \right|, \\ F_{Bp2}(x) = y_2 + |y_2 - F_{A2}(x)| + \left| \frac{y_2}{F_{A2}(x)} \right|, \\ F_{Bp3}(x) = y_3 + |y_3 - F_{A3}(x)| + \left| \frac{y_3}{F_{A3}(x)} \right|, \\ \dots \\ F_{Bpi}(x) = y_n + |y_n - F_{Ai}(x)| + \left| \frac{y_n}{F_{An}(x)} \right|. \end{cases} \quad (6)$$

где $F_{врi}(x)$ – временное значение исходных данных i -го вида аппроксимации; $F_{Ai}(x)$ – значение найденной функции i -го вида аппроксимации.

Если $y_n < F_{Ai}(x)$, то уточнение аппроксимации происходит по модели (7):

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{вр1}(x) = y_1 - |y_1 - F_{A1}(x)| - \left| \frac{y_1}{F_{A1}(x)} \right|, \\ F_{вр2}(x) = y_2 - |y_2 - F_{A2}(x)| - \left| \frac{y_2}{F_{A2}(x)} \right|, \\ F_{вр3}(x) = y_3 - |y_3 - F_{A3}(x)| - \left| \frac{y_3}{F_{A3}(x)} \right|, \\ \dots \\ F_{врi}(x) = y_n - |y_n - F_{Ai}(x)| - \left| \frac{y_n}{F_{Ai}(x)} \right|. \end{array} \right. \quad (7)$$

Тогда новая уточненная модель экспериментальных данных будет выглядеть следующим образом (8):

$$F_{Ay2}(x) = 6,5311x^{2,9059}. \quad (8)$$

Погрешность данной модели (8) составляет 6,97%.

В табл. 4 представлены результаты расчета погрешностей найденной модели аппроксимации $F_A(x)$, уточненной $F_{Ay}(x)$ и новой уточненной моделей $F_{Ay2}(x)$.

Таблица 4
Погрешности найденных моделей в каждой точке экспериментальных данных

x	Погрешность $F_A(x)$	Погрешность $F_{Ay}(x)$	Погрешность $F_{Ay2}(x)$
1	4,97	2,13	0,47
1,5	1,07	2,38	4,11
2	4,34	4,46	5,49
2,5	5,99	5,15	5,63
3	6,85	5,22	5,24
3,5	7,28	4,98	4,62
4	29,06	30,96	19,94
4,5	7,62	4,24	3,19
5	7,57	3,74	2,51

Из табл. 4 видно, что уточнение в точках найденной модели по сравнению с исходными данными произошло в шести точках из девяти – для $F_{Ay}(x)$, а для $F_{Ay2}(x)$ – семи из девяти.

Таким образом, проведенный анализ методов повышения аппроксимации позволил определить дополнительный коэффициент для разработанной модели повышения точности аппроксимации [4], что позволило снизить погрешность найденной модели экспериментальных данных. Новая уточненная модель позволяет уточнить модель экспериментальных данных в целом на 1,34 %, а в отдельных точках достигает до 10 %.

Список литературы

1. Голубинский, А. Н. Методы аппроксимации экспериментальных данных и построения моделей / А. Н. Голубинский // Вестник Воронежского института МВД России. – 2007. – № 2. – С. 138–143.
2. Попов, В. П. Основы теории цепей / В. П. Попов. – М. : Высш. шк., 1985. – 496 с.
3. Яковлев, Я. Н. Радиотехнические цепи и сигналы. Задачи и задания : учеб. пособие / под ред. Я. Н. Яковлева. – М. : ИНФРА-М, 2003. – 348 с.
4. Петрянин, Д. Л. Повышение точности моделей аппроксимации / Д. Л. Петрянин, Н. К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 2 (14). – С. 59–66.

5. Обзор средств MATLAB и ToolBox'ов для приближения данных. – URL: <http://matlab.exponenta.ru/>
6. MathWorks – Makers of MATLAB and Simulink // MathWorks develops, sells, and supports MATLAB and Simulink products. – URL: <http://www.mathworks.com/>
7. Кендалл, М. Многомерный статистический анализ и временные ряды / М. Кендалл, А. Стьюарт ; пер. с англ. под ред. А.Н. Колмогорова, Ю. В. Прохорова. – М. : Наука, 1976. – 736 с.
8. Заикин, П. В. Аппроксимация эмпирических функций полиномами высших порядков / П. В. Заикин, М. А. Погореловский, В. С. Микшина // Вестник кибернетики. – 2015. – № 4. – С. 129–134.
9. Примеры решения математических задач в MAPLE. Ряды Фурье // Секция геометрии факультета математики и информатики Каразинского университета. – URL: http://geometry.karazin.ua/20141022173616_327e9c40.pdf/
10. Матросов, А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / А. В. Матросов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2001. – 528 с.
11. Петрянин, Д. Л. Повышение точности расчетов методов аппроксимации / Д. Л. Петрянин, Н. К. Юрков, Ю. А. Романенко // Труды международного симпозиума Надежность и качество. – 2015. – № 1. – С. 123–127.

Петрянин Дмитрий Львович

аспирант,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: ra4cbh@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* В настоящее время задача аппроксимации является актуальной темой решения в различных технических исследованиях. Целью является нахождение моделей аппроксимации с максимально возможной точностью и низкой погрешностью. Доказана необходимость разработки эффективных методов анализа экспериментальных кривых и построения моделей аппроксимации. *Материалы и методы.* Проведен анализ распространенных методов повышения точности аппроксимации. На примере произведен расчет аппроксимации (методом наименьших квадратов) с нахождением модели экспериментальных данных. Затем по ранее разработанной модели повышения точности аппроксимации повторно произвели расчет. Учитывая проведенный анализ, была получена уточненная модель повышения точности аппроксимации. По полученной модели произвели поиск новой модели экспериментальных данных. Также произведен расчет погрешностей всех найденных моделей экспериментальных данных в целом и в каждой точке исходных данных. Все результаты расчетов сведены в таблицы. *Результаты.* Доказано, что разработанная уточненная математическая модель повышения точности аппроксимации позволила повысить точность выходной модели экспериментальных данных в целом на 1,34 %, а в отдельных точках экспериментальных данных достигает до 10 %. *Выводы.* Применение моделей аппроксимации позволяет оценивать полученные результаты исследования технических систем и получать результаты, более приближенные к исходным данным.

Ключевые слова: аппроксимация, данные, модель, точность, погрешность.

Petryanin Dmitriy L'vovich

postgraduate student,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Abstract. *Background.* The challenge now is a hot topic of approximation of solutions to various technical studies. The aim is to find approximations of the models with the greatest possible precision and low error. The necessity of the development of effective methods for the analysis of experimental curves and constructing approximation models. *Materials and methods.* The analysis of the common methods of increasing the accuracy of approximation. For example, the approximation made settlement (least squares method) with finding a model of experimental data. Then, the previously developed model increasing accuracy of approximation re made payment. Given the above analysis was derived refined model increasing accuracy of approximation. According to the resulting model made a search for a new model of the experimental data. calculation errors also made all found models of experimental data as a whole and at each point of input data. All calculation results tabulated. *Results.* It is proved that the developed refined mathematical model of increasing approximation accuracy has improved the accuracy of the output model of experimental data as a whole 1,34 %, and in some points of the experimental data up to 10 %. *Conclusions.* The use of the approximation model allows to evaluate the results of research and technical systems to obtain results more close to the original data.

Key words: approximation, the data, model, accuracy, error.

УДК 004.021, 519.651, 519.654

Петрянин, Д. Л.

Анализ методов повышения точности аппроксимации и новая уточненная модель повышения точности аппроксимации / Д. Л. Петрянин // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 3 (15). – С. 96–102. DOI 10.21685/2307-4205-2016-3-15.